

Compléments sur le diagramme de BODE

Raymond CRAMPAGNE, Nathalie RAVEU

1 Généralités sur la réponse en fréquence

On appelle « réponse en fréquence » la variation en fonction de la fréquence de l'amplitude ou de la phase du signal de sortie, lorsque le signal d'entrée est une excitation sinusoïdale à la pulsation $\omega = 2\pi f$. Cette réponse est d'une importance fondamentale dans un grand nombre de disciplines telles que l'électronique, les télécommunications, le traitement du signal ou l'automatique.

La réponse en fréquence peut être prédite mathématiquement en utilisant la fonction de transfert isomorphe $H(p)$. Pour cela, on utilise d'abord les techniques permettant de déterminer $H(p)$ dans le plan de LAPLACE ; ensuite, on calcule la valeur de $H(p)$ sur l'axe $j\omega$ en effectuant la transformation :

$$p \rightarrow j\omega \quad (1)$$

La réponse en fréquence peut être visualisée graphiquement en traçant l'amplitude $|H(j\omega)|$ et la phase $\angle H(j\omega)$ en fonction de ω . Elle peut être observée expérimentalement en soumettant le circuit à une excitation sinusoïdale d'amplitude fixe X_m et de phase θ_x mais de pulsation ω variable. L'amplitude Y_m et la phase θ_y de la réponse peuvent être mesurées à l'aide d'un oscilloscope numérique ou analogique pour différentes valeurs de ω . On trace ensuite point par point en fonction de ω , la valeur de l'amplitude et de la phase ; soit :

$$|H(j\omega)| = \frac{Y_m}{X_m} \quad \angle H(j\omega) = \theta_y - \theta_x \quad (2)$$

Le fait d'imposer $p \rightarrow j\omega$ est illustré sur la figure 1 en ce qui concerne l'amplitude. De part sa définition, $|H(p)|$ peut être calculée pour n'importe quelle valeur dans le plan complexe des p .

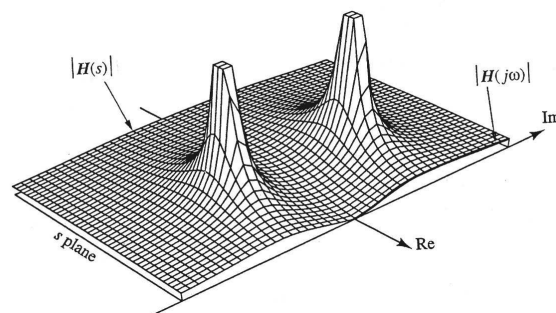


FIG. 1: Variation de l'amplitude dans le plan de LAPLACE.

Cependant, lorsque l'on s'intéresse à la réponse fréquentielle, il suffit de restreindre l'étude à l'axe $j\omega$; la courbe représentant $|H(j\omega)|$ peut être obtenue en prenant l'intersection de la surface représentant $|H(p)|$ avec le plan vertical passant par l'axe imaginaire. Des considérations semblables peuvent être faites pour la courbe de phase.

Rappelons que la réponse fréquentielle est la réponse à un signal sinusoïdal après que tous les transitoires se soient évanouis ; tous les pôles de la fonction de transfert $H(p)$ doivent donc se trouver

dans le demi plan gauche du plan de LAPLACE. Lors de l'étude en régime temporel quelconque des systèmes linéaires invariants temporellement (LIT), on montre que la position des fréquences critiques a une influence importante sur la forme de la réponse naturelle. Nous avons de bonnes raisons de penser que l'impact sera aussi important sur la forme de la réponse fréquentielle. Par exemple, l'examen de la figure 1, indique que le profil de la courbe $|H(j\omega)|$ est fortement influencé par la proximité des pôles sur l'axe imaginaire. Le but de ce document est de montrer la très grande utilité de la fonction de réseau $H(p)$. Elle peut en effet non seulement servir pour localiser les fréquences critiques dans le plan des p , mais aussi pour visualiser la réponse fréquentielle par l'intermédiaire de graphiques connus sous le nom de diagrammes de BODE en amplitude et en phase, pouvant être tracés très simplement.

Par simplicité de notation, nous restreindrons notre étude au cas de fonctions de réseau de type « gain ». Si la fonction de réseau a les dimensions d'une impédance, on pourra toujours l'exprimer sous la forme $R_0H(p)$ où R_0 est une résistance de normalisation convenable et $H(p)$ est alors une fonction « gain » sans dimension. De la même façon, une fonction de réseau de type admittance peut être écrite sous la forme $G_0H(p)$ où G_0 est une conductance de normalisation convenable.

1.1 Échelles semi-logarithmiques

Les intervalles de fréquence rencontrés dans l'étude des réponses en fréquence sont souvent tellement grands (de façon classique du hertz au gigahertz) que si l'on veut visualiser la réponse avec suffisamment de précision et de clarté, sur tout l'intervalle fréquentiel, il est commode d'utiliser des échelles semi-logarithmiques.

De façon plus spécifique, l'amplitude $|H(j\omega)|$ et la phase $\angle H(j\omega)$ sont rapportées sur des échelles linéaires, graduées respectivement en « décibels » et en « degrés ». La pulsation ω quant à elle est rapportée sur l'axe horizontal avec une échelle logarithmique divisée en modules appelés, décades. Ces figures semi-logarithmiques sont appelées diagrammes de BODE en mémoire de l'ingénieur américain Hendrik W.BODE (prononcer bodee) (1905-1982) qui les vulgarisa.

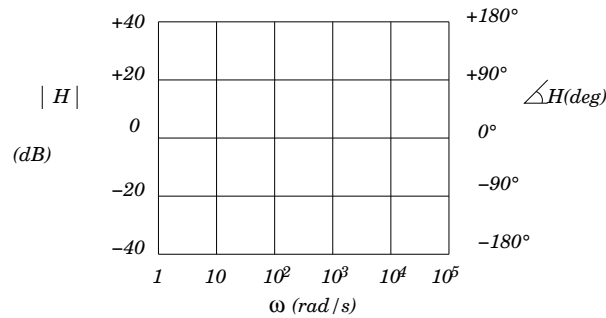


FIG. 2: Échelles logarithmiques et modules.

Pour tracer les diagrammes de BODE, il est donc important de se procurer du papier semi-logarithmique. Cependant, pour apprécier toutes les particularités de ces échelles, nous allons apprendre à tracer nos propres échelles logarithmiques. Pour cela, nous faisons d'abord des marques également espacées sur l'axe vertical afin de représenter des intervalles égaux gradués en décibels tels que +40, +20, 0, -20, -40 dB ou des intervalles égaux gradués en degrés tels que +180°, +90°, 0°, -90°, -180° puisque nous avons noté que l'axe vertical était gradué linéairement. On fait ensuite des marques également espacées sur l'axe horizontal qui représentent des intervalles fréquentiels d'une décade tels que 1, 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , \dots , rad/s. Ceci est montré sur la figure 2. L'intervalle d'une décade est aussi appelé, ordre de grandeur en fréquence ou module du papier logarithmique. Soit une valeur fréquentielle spécifique à l'intérieur d'un module : $10^n < \omega < 10^{n+1}$ rad/s, sa localisation dans le module est déterminée à partir de la relation :

$$l = \log\left(\frac{\omega}{10^n}\right) \quad (3)$$

Par exemple, la localisation de $\omega = 320$ rad/s, qui se trouve positionnée à l'intérieur du module $10^2 < \omega < 10^3$ rad/s est $l = \log(320/10^2) = \log(3,2) \approx 0,5$, ce qui correspond approximativement au milieu entre les deux marques définissant le module 100 rad/s et 1000 rad/s.

De façon semblable, on trouve que $\omega = 2000$ rad/s se trouve à la position $l = \log(2000/10^3) \approx 0,3$. Cette marque correspond au tiers du chemin entre les marques 1000 rad/s et 10000 rad/s. La figure 3 représente la position des fréquences à l'intérieur d'un module $1 < \omega < 10$ rad/s.

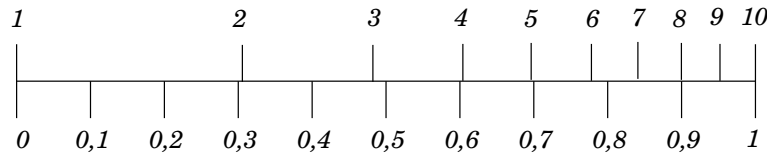


FIG. 3: Position des fréquences à l'intérieur d'un module.

Souvent, il est commode d'utiliser une fréquence normalisée ω/ω_0 où ω_0 est une caractéristique fréquentielle du circuit. Les unités des fréquences normalisées sont les décades. Pour visualiser les variations fréquentielles de part et d'autre de ω_0 , on choisira les marques de fréquences normalisées suivantes :

$$\dots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^{+2}, 10^{+3}, \dots \quad (4)$$

Il apparaît clairement que la nature logarithmique des échelles fréquentielles comprime les fréquences élevées et dilate les fréquences basses; cette propriété nous permettra de visualiser la réponse aux deux extrémités de la bande de fréquence, en gardant un niveau comparable dans le détail de la représentation.

Remarque : Vous avez déjà noté qu'on parle de façon impropre de fréquences alors qu'on devrait parler de pulsations. Ceci est une constante chaque fois que l'on s'intéresse aux diagrammes de BODE. Lorsqu'on travaille en unités normalisées, il est équivalent de parler en pulsation ou en fréquence, le facteur 2π n'intervenant plus.

1.2 Les Décibels

La valeur exprimée en décibels et notée (dB) de la fonction gain H est définie par la relation :

$$|H|_{\text{dB}} = 20 \log(|H|) \quad (5)$$

Inversement, la conversion des valeurs exprimées en décibels en valeurs naturelles sera faite en utilisant la relation ci dessous :

$$|H| = 10^{|H|_{\text{dB}}/20} \quad (6)$$

Par exemple, la valeur exprimée en décibels d'un gain de 400 est $20 \log(400) = 52,0$ dB. Inversement 46 dB correspond à un gain de $10^{46/20} \approx 200$. Le tableau 1 résume la plupart des valeurs intéressantes rencontrées en pratique concernant la conversion en décibels de la valeur naturelle et vice-versa. On notera qu'un gain unité correspond à une valeur nulle exprimée en décibels, qu'un gain supérieur à l'unité correspond à des valeurs positives de décibels et qu'un gain inférieur à l'unité (pertes) correspond à des valeurs négatives en décibels.

Pour utiliser simplement le tableau 1, on constate qu'une multiplication de nombres choisis dans les colonnes 1 et 3, équivaut à ajouter les nombres correspondants dans les colonnes 2 et 4. Par exemple, 200 en valeur naturelle se récrit 2×100 qui correspond à une somme en décibels, soit : $6 + 40 = 46$. À l'inverse, 23 dB se décompose en $20 + 3$; d'où en valeur naturelle, la multiplication $2 \times 10 = 20$. Grâce à un moyen mnémotechnique, les développements ci-dessous permettent à l'intérieur d'un module de recalculer simplement la valeur exprimée en décibels à partir de la connaissance uniquement des trois valeurs suivantes : $\log(2) \approx 0,3$; $\log(3) \approx 0,477$ et $\log(7) \approx 0,845$.

$ H $	$ H _{\text{dB}}$	$ H $	$ H _{\text{dB}}$
1	0	1	0
$\sqrt{2}$	3	$1/\sqrt{2}$	-3
2	6	$1/2$	-6
$\sqrt{10}$	10	$1/\sqrt{10}$	-10
10	20	0,1	-20
100	40	0.01	-40
1000	60	0.001	-60
10^n	$20n$	10^{-n}	$-20n$

TAB. 1: Conversion valeurs naturelles, décibels.

Moyen mnémotechnique pour calculer les décibels

$$1 \rightarrow \log(1) = 0$$

$$2 \rightarrow \log(2) = 0,301 \approx 0,3$$

$$3 \rightarrow \log(3) = 0,477$$

$$4 \rightarrow \log(4) = \log(2^2) = 2 \log(2) = 0,602 \approx 0,6$$

$$5 \rightarrow \log(5) = \log(10/2) = \log(10) - \log(2) = 1 - 0,301 = 0,699 \approx 0,7$$

$$6 \rightarrow \log(6) = \log(3 \times 2) = \log(3) + \log(2) = 0,301 + 0,477 = 0,778$$

$$7 \rightarrow \log(7) = \log(\sqrt{49}) \simeq \log(\sqrt{50}) = \frac{1}{2} \log(100/2) = \frac{1}{2}(2 - 0.301) = 0,8495$$

la vraie valeur est 0,845.

$$8 \rightarrow \log(8) = \log(2^3) = 3 \log(2) = 3 \times 0,301 = 0,903 \approx 0,9$$

$$9 \rightarrow \log(9) = \log(3^2) = 2 \log(3) = 2 \times 0,477 = 0,954$$

$$10 \rightarrow \log(10) = 1$$

En utilisant les propriétés bien connues de la variable complexe, on peut aisément vérifier les relations suivantes pour deux fonctions de transfert H_1 et H_2 données :

$$\begin{aligned} |H_1 \times H_2|_{\text{dB}} &= |H_1|_{\text{dB}} + |H_2|_{\text{dB}} & |H_1/H_2|_{\text{dB}} &= |H_1|_{\text{dB}} - |H_2|_{\text{dB}} \\ \angle(H_1 \times H_2) &= \angle(H_1) + \angle(H_2) & \angle(H_1/H_2) &= \angle(H_1) - \angle(H_2) \\ |1/H|_{\text{dB}} &= -|H|_{\text{dB}} & \angle(1/H) &= -\angle(H) \end{aligned}$$

Nous trouverons par la suite, que les propriétés énoncées précédemment sont particulièrement utiles dans la manipulation des diagrammes de BODE, tant en amplitude qu'en phase.

1.3 Un exemple illustré

Nous allons illustrer les concepts précédents sur un exemple.

Exemple 1 : Déterminer la constellation des pôles et des zéros pour l'impédance d'entrée du dipôle représenté ainsi que les valeurs numériques, sur la figure 4 .

Solution de l'exemple 1 : L'impédance isomorphe $Z(p)$ se détermine facilement par examen du circuit ; c'est la mise en série d'une résistance R_1 et d'un dipôle constitué par la mise en parallèle d'une résistance R_2 et d'un condensateur $1/(Cp)$. En développant les calculs, on voit aisément que $Z(p)$ peut se mettre sous la forme $Z(p) = (R_1 + R_2) H(p)$.

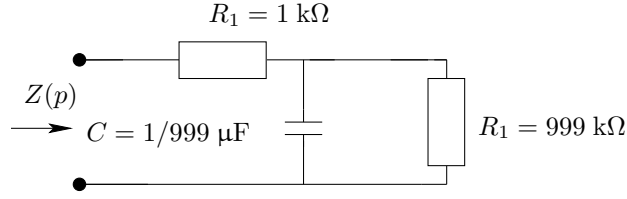


FIG. 4: Circuit analysé dans l'exemple 1.

Les lois classiques de mise en série et en parallèle conduisent aux relations ci-dessous :

$$\begin{aligned} Z(p) &= R_1 + \frac{R_2 \times \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}} = R_1 + \frac{R_2}{R_2 Cp + 1} = \frac{R_1 (R_2 Cp + 1) + R_2}{R_2 Cp + 1} \\ &= (R_1 + R_2) \times \frac{\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} Cp + 1}{R_2 Cp + 1} = (R_1 + R_2) \times H(p) \end{aligned}$$

$H(p)$ est la partie de $Z(p)$ qui dépend de la fréquence. Tenant compte des valeurs numériques des composants indiquées sur la figure 4, on obtient l'expression suivante pour $H(p)$:

$$H(p) = \frac{\frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} Cp + 1}{R_2 Cp + 1} = \frac{\frac{p}{10^{+6}} + 1}{\frac{p}{10^{+3}} + 1} \quad (7)$$

$H(p)$ a un zéro en $p = z_1 = -10^{+6}$ rad/s et un pôle en $p = p_1 = -10^{+3}$ rad/s. Le diagramme des pôles et des zéros est représenté sur la figure 5 en notant par une croix le pôle et par un rond, le zéro.

Pour trouver la réponse en fréquence, on impose $p \rightarrow j\omega$ dans l'équation (7). Après réarrangement, on obtient la relation complexe décrivant $H(j\omega)$; soit :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j \left(\frac{\omega}{10^{+6}} \right)}{1 + j \left(\frac{\omega}{10^{+3}} \right)}$$

L'expression analytique du module peut s'écrire de la façon suivante :

$$|H| = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega}{10^{+6}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{10^{+3}} \right)^2}}$$

On obtient alors l'expression de $|H|$ en décibels décrite ci-dessous, la racine carrée donnant une contribution d'un facteur 1/2 :

$$|H|_{\text{dB}} = 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{10^{+6}} \right)^2 \right] - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{10^{+3}} \right)^2 \right]$$

De plus, l'expression donnant la phase peut s'écrire :

$$\angle H(j\omega) = \arctan \left(\frac{\omega}{10^{+6}} \right) - \arctan \left(\frac{\omega}{10^{+3}} \right)$$

En utilisant une calculette de poche, on peut évaluer ces expressions pour différentes valeurs de ω et les rapporter point par point sur du papier semi-logarithmique. Les graphes obtenus pour l'amplitude et la phase sont représentés sur la figure 5.

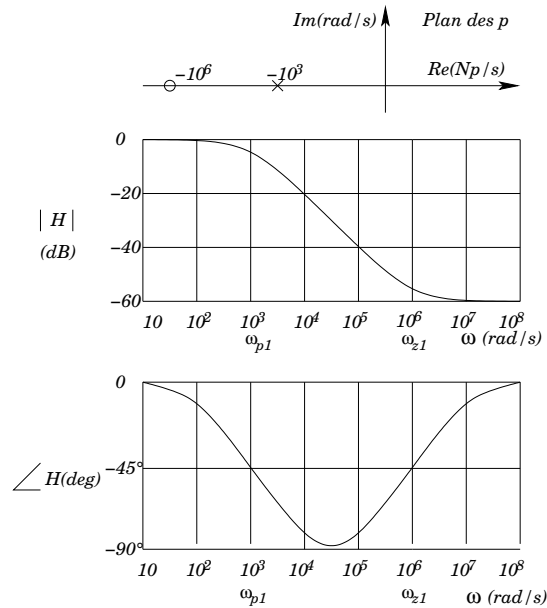


FIG. 5: Fonction gain de l'équation (7) : localisation des pôles et des zéros ; diagrammes de BODE

Exercice 1 : Reprendre l'exemple 1, le condensateur C étant remplacé par une bobine de valeur $L = 9,99$ mH.

Solution de l'exercice 1 : $Z(p)$ peut s'exprimer sous la forme $Z(p) = R_1 H(p)$ avec :

$$H(p) = \frac{\frac{pL}{R_1 R_2} + 1}{\frac{pL}{R_2} + 1} = \frac{\frac{p}{10^{+5}} + 1}{\frac{p}{10^{+8}} + 1}$$

Dans l'exemple 1, lorsqu'on fait varier ω de zéro à l'infini, on note que les pentes de la courbe d'amplitude et de la courbe de phase changent simultanément lorsque ω atteint les fréquences critiques qui ont pour valeurs $\omega = \omega_{p1} = 10^{+3}$ rad/s et $\omega = \omega_{z1} = 10^{+6}$ rad/s. De façon plus précise, à la fréquence du pôle ω_{p1} , on obtient un changement de pente de -20 dB/décade et un changement de phase de -90° ; à la fréquence du zéro ω_{z1} , on obtient un changement de pente de $+20$ dB/décade et un changement de phase de $+90^\circ$. On peut résumer ces notions de la façon suivante :

Une fréquence critique apporte un changement de pente de ± 20 dB/décade et un changement de phase de $\pm 90^\circ$. Le signe "+" doit être appliqué si la fréquence critique correspond à un zéro et le signe "-" si la fréquence critique est un pôle.

Sur le circuit de la figure 4, la pente de la courbe d'amplitude varie de 0 dB/décade à -20 dB/décade pour $\omega = \omega_{p1}$ et de -20 dB/décade à 0 dB/décade pour $\omega = \omega_{z1}$. Pour des raisons évidentes, les fréquences critiques ω_{p1} et ω_{z1} peuvent aussi être appelées **fréquences de coupure**.

On observe aussi que le retard de phase dû au pôle commence à partir de $\omega \approx 0,1\omega_{p1}$, atteint -45° pour $\omega = \omega_{p1}$ et tend vers -90° pour $\omega \approx 10\omega_{p1}$. De la même façon, l'avance de phase causée par le zéro, commence en $\omega \approx 0,1\omega_{z1}$, atteint 45° pour $\omega = \omega_{z1}$ et tend vers $+90^\circ$ pour $\omega \approx 10\omega_{z1}$.

On voit donc qu'il y a corrélation entre la position d'une racine dans le plan des p , pour laquelle $H(p)$ vaut zéro ou l'infini et la fréquence de cassure correspondante sur l'axe $j\omega$, pour laquelle, à la fois la pente de l'amplitude et la valeur de la phase ont des changements positifs ou négatifs.

Il est intéressant de remarquer que lorsqu'on utilise le diagramme « pôles-zéros », on parle des fréquences critiques p_1 et z_1 en termes de racines négatives que l'on devrait exprimer puisqu'on est dans le plan des p en Np/s et que l'on exprime en rad/s . Au contraire, lorsqu'on utilise le diagramme fréquentiel, on parle des fréquences de cassure correspondantes ω_{p1} et ω_{z1} en termes de valeurs positives que l'on exprime aussi en rad/s .

2 Briques élémentaires pour la fonction de réseau

Quand bien même il serait possible de calculer facilement la réponse fréquentielle et donc de la représenter graphiquement exactement, il apparaît le plus souvent suffisant d'utiliser l'approximation linéaire par morceaux des courbes afin d'obtenir les caractéristiques essentielles de cette réponse. L'avantage principal des diagrammes de BODE linéaires, aussi appelés diagrammes asymptotiques ou idéalisés est qu'ils peuvent être tracés instantanément sans avoir à mettre en oeuvre des calculs pouvant devenir laborieux. Cependant avant de traiter de la méthode générale permettant de tracer les diagrammes asymptotiques, nous allons apprendre à représenter graphiquement les briques élémentaires des fonctions de réponse de base.

2.1 Fonctions ne variant pas avec la fréquence

La fonction gain ne variant pas avec la fréquence a pour expression :

$$H(p) = K \quad (8)$$

Son diagramme d'amplitude est une ligne horizontale positionnée à 0 dB si $|K| = 1$, au dessus de la ligne 0 dB si $|K| > 1$ et en dessous de la ligne 0 dB si $|K| < 1$. De plus, le diagramme de phase est une droite horizontale positionnée à 0° si K est positif ou à $\pm 180^\circ$ si K est négatif. Ces diagrammes sont représentés sur les figures 6a) et b) : nous avons choisi la représentation en phase sous la forme -180° pour des valeurs de K négatives. Il est bien entendu équivalent de noter la phase $+180^\circ$ ou -180° puisque la différence de phase est 2π .

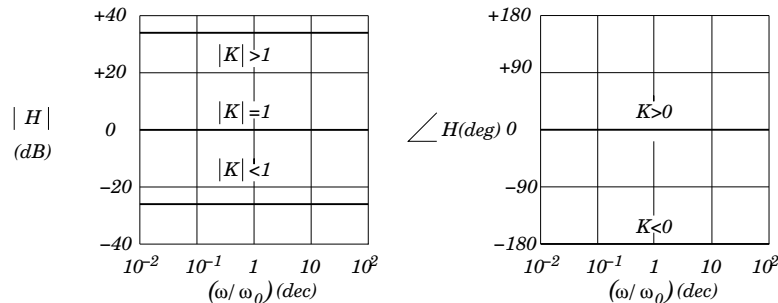


FIG. 6: Diagramme de BODE de fonctions indépendantes de la fréquence

Des exemples de circuit ayant une fonction gain constante sont :

- les amplificateurs idéaux non inverseurs pour lesquels $H(p) = 1 + R_2/R_1 > 1$;
- le suiveur de tension idéal pour lequel $H(p) = 1$;
- le diviseur de tension pour lequel $H(p) = R_2/(R_1 + R_2) < 1$.

Toutes ces fonctions ont une phase nulle : $\angle H = 0^\circ$.

Par contre, l'amplificateur idéal inverseur dont la fonction de réponse est $H(p) = -R_2/R_1$ a une phase de $\pm 180^\circ$. De plus, suivant la valeur des résistances que l'on utilise, on peut avoir $|H| > 1$, $|H| = 1$, $|H| < 1$. On gardera toujours à l'esprit qu'une amplification implique des valeurs positives exprimées en dB et une atténuation des valeurs négatives.

2.2 Fonctions ayant une racine simple à l'origine

Toutes les fonctions de réponse qui ont une racine simple à l'origine peuvent s'écrire sous la forme normalisée suivante :

$$H(p) = \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^{\pm 1} \quad (9)$$

Le signe « + » signifie que la racine est un zéro simple alors que le signe « - » signifie que la racine est un pôle simple. Il est bien connu que, dans le domaine temporel, la fonction $H = p/\omega_0$ représente un système « dérivateur » alors que la fonction $H = (p/\omega_0)^{-1}$ représente un système « intégrateur ».

Un exemple simple de fonction ayant un zéro à l'origine est l'impédance inductive $Z(p) = pL$. On peut récrire cette expression sous la forme $Z(p) = R_0(pL/R_0) = R_0(p/\omega_0)$ où R_0 est une résistance de normalisation et $\omega_0 = R_0/L$ est la pulsation de normalisation.

Un exemple simple de fonction ayant un pôle à l'origine est l'impédance capacitive $Z(p) = 1/(pC)$. On peut récrire cette expression sous la forme $Z(p) = R_0 \times 1/(R_0Cp) = R_0(p/\omega_0)^{-1}$ où R_0 est une résistance de normalisation et $\omega_0 = 1/(R_0C)$ est la pulsation de normalisation.

En imposant $p \rightarrow j\omega$ dans l'expression précédente, on obtient :

$$H(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^{\pm 1} \quad (10)$$

Soit en extrayant le module et la phase de la relation précédente :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad \angle H = \pm 90^\circ \quad (11)$$

Puisque dans le diagramme d'amplitude semi-logarithmique, l'ordonnée est $y = |H|_{\text{dB}}$ et l'abscisse est $x = \log(\omega/\omega_0)$, l'équation (11) est du type :

$$y = \pm 20x \quad (12)$$

On peut donc la représenter par une ligne droite de pente +20 dB/décade si la racine est un zéro et une ligne droite de pente -20 dB/décade si la racine est un pôle. Les diagrammes de BODE correspondant aux équations (11) sont représentés sur les figures 7.

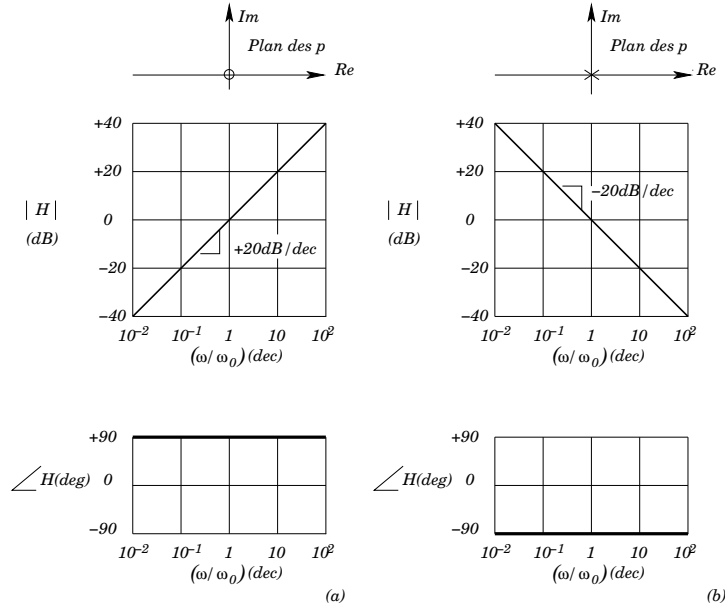


FIG. 7: Localisation des racines dans le plan des p et diagrammes de BODE en amplitude et en phase : a) pour un circuit dérivateur $H = p/\omega_0$; b) pour un circuit intégrateur $H = \omega_0/p$.

Puisque les courbes d'amplitude passent par le point 0 dB ou gain unité, pour $(\omega/\omega_0) = 1$, ω_0 est souvent appelée « fréquence de gain unité » du circuit « dérivateur » ou « intégrateur ».

Dans les applications « audio », les intervalles fréquentiels sont souvent exprimés en octaves (symbole anglo-saxon *oct*) plutôt qu'en décades, utilisant les propriétés de l'oreille humaine pour les rapports de fréquence 2 à 1. Une pente de ± 20 dB/décade est alors équivalente à une pente de $\pm 20 \log(2) \approx \pm 6$ dB/octave.

2.3 Fonctions ayant une racine réelle négative

Toutes les fonctions de réseau ayant uniquement une racine réelle négative peuvent s'exprimer sous la forme $KH(p)$ où K est un facteur d'échelle convenable et :

$$H(p) = \left(\frac{p + \omega_0}{\omega_0} \right)^{\pm 1} \qquad H(p) = \left(\frac{p}{\omega_0} + 1 \right)^{\pm 1} \qquad (13)$$

Le signe « + » convient lorsque la racine est un zéro ; le signe « - » convient lorsque la racine est un pôle. Dans les deux cas, la racine est située en :

$$p = -\omega_0 \qquad (14)$$

Un exemple de fonction ayant un « zéro négatif réel » peut être obtenu en s'intéressant à l'impédance d'une résistance et d'une bobine connectées en série ; soit :

$$Z(p) = R + pL = R \left(1 + \frac{pL}{R} \right) = R \left(\frac{p}{\omega_0} + 1 \right) \qquad \omega_0 = \frac{R}{L}$$

Un exemple de fonction ayant un « pôle négatif réel » peut être obtenu en s'intéressant à l'impédance d'une résistance et d'un condensateur connectées en parallèle ; soit :

$$Z(p) = \frac{R \times \frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = R \left(\frac{p}{\omega_0} + 1 \right)^{-1} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Imposant dans les deux relations précédentes, $p \rightarrow j\omega$ et réarrangeant les écritures, on obtient :

$$H(j\omega) = \left[1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^{\pm 1} \qquad (15)$$

Soit les expressions correspondantes ci-dessous pour le module et la phase :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \qquad \angle H(j\omega) = \pm \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \qquad (16)$$

En traçant ces relations en fonction de la variable ω/ω_0 , on obtient les courbes exactes représentées en trait noir fin sur les figures 8. On constate que pour $\omega/\omega_0 = 1$, on a les relations suivantes :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 3 \text{ dB} \qquad \angle H = \pm 45^\circ \qquad (17)$$

C'est pourquoi, on a pris l'habitude d'appeler ω_0 fréquence à +3 dB ou fréquence à +45° si la racine est un zéro et fréquence à -3 dB ou fréquence à -45° si la racine est un pôle.

Les figures 8 suggèrent que l'on peut approximer les courbes d'amplitude réelle par une asymptote aux basses fréquences de valeur :

$$|H|_{\text{dB}} = 0 \qquad \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$$

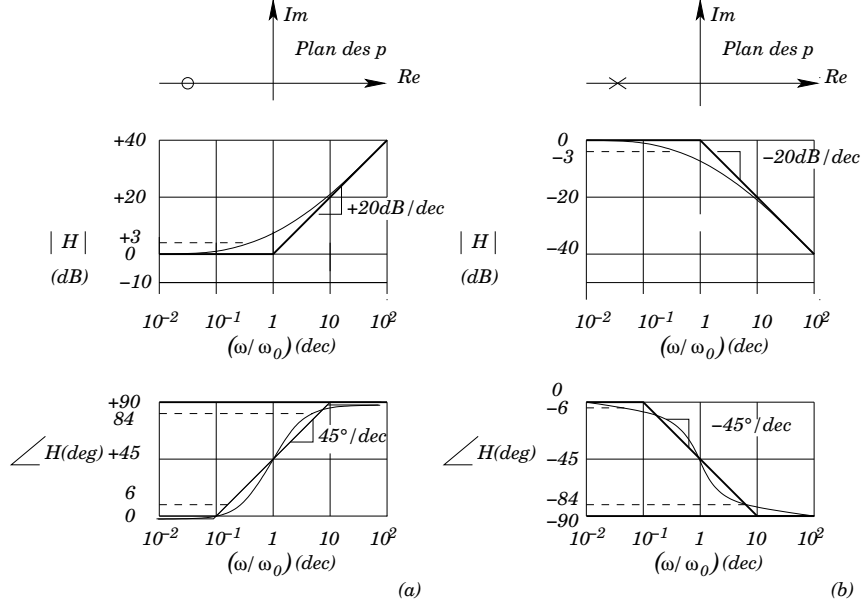


FIG. 8: Localisation des racines dans le plan des p et diagrammes de BODE en amplitude et en phase : a) pour $H = p/\omega_0 + 1$; b) $H = (p/\omega_0 + 1)^{-1}$. Les courbes en traits fins sont les diagrammes exacts et les courbes en traits épais sont les approximations.

Pour les hautes fréquences, on a une asymptote de valeur :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$$

En d'autres termes, aux basses fréquences, une fonction qui a une racine réelle négative tend vers la fonction gain unité ; aux hautes fréquences, elle approche la fonction caractéristique du dérivateur si la racine est un zéro ou la fonction caractéristique d'un intégrateur si la racine est un pôle.

En utilisant la relation (16), on peut voir facilement que l'erreur maximale se produit en $\omega/\omega_0 = 1$; l'erreur commise est alors de 3 dB. Pour $\omega/\omega_0 = 2$ et $\omega/\omega_0 = 0.5$, soit un écart d'une octave, l'erreur commise est alors d'environ 1 dB. Pour $\omega/\omega_0 \leq 0,1$ et $\omega/\omega_0 \geq 10$, l'erreur peut pratiquement être négligée. Puisque l'asymptote basse fréquence et l'asymptote haute fréquence se rencontrent pour $\omega/\omega_0 = 1$, ω_0 est souvent appelée fréquence de coupure.

Si l'on revient maintenant aux courbes de phase, on obtient l'asymptote basse fréquence pour $\omega/\omega_0 \leq 0,1$, caractérisée par la propriété :

$$\angle H = 0^\circ \quad (18)$$

L'asymptote aux hautes fréquences s'obtient pour $\omega/\omega_0 \geq 10$ et est caractérisée par la relation :

$$\angle H = \pm 90^\circ \quad (19)$$

Dans l'intervalle fréquentiel $0,1 \leq \omega/\omega_0 \leq 10$, on peut approximer cette courbe de phase par les lignes droites allant de 0° pour $\omega/\omega_0 = 0,1$ et passant par $\pm 90^\circ$ pour $\omega/\omega_0 = 10$. Les pentes de ces droites valent $\pm 45^\circ/\text{décade}$. Utilisant la relation (16b), on constate facilement que l'erreur maximale se produit en $\omega/\omega_0 = 0,1$ ou $\omega/\omega_0 = 10$ et a approximativement pour valeur 6° .

Remarques : Les expressions (13) sont doublement normalisées en amplitude et en fréquence. Il est évident de constater que la variable fréquentielle est ω/ω_0 . De plus pour $\omega \ll \omega_0$, les diagrammes tant en amplitude qu'en phase tendent vers zéro. Lorsqu'on s'intéresse aux variations

temporelles au lieu des variations fréquentielles, on préfère utiliser les expressions analytiques suivantes :

$$H(p) = (1 + \tau p)^{\pm 1} \qquad \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

τ est la constante de temps du système dont l'unité est la seconde.

2.4 Fonctions ayant des paires de racines complexes

Comme on le sait en théorie des circuits (afin d'obtenir des polynômes à coefficients réels en p), les racines complexes ne s'obtiennent jamais seules mais par paires complexes conjuguées.

2.4.1 Cas de racines simples

Toutes les fonctions de réponse ayant uniquement une paire de racines complexes peuvent s'exprimer sous la forme $KH(p)$ où K est un facteur d'échelle convenable et $H(p)$ a la forme suivante :

$$H(p) = \left[\left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 + 2\zeta \left(\frac{p}{\omega_0} \right) + 1 \right]^{\pm 1} \qquad H(p) = \left[\frac{p^2 + \frac{\omega_0}{Q}p + \omega_0^2}{\omega_0^2} \right]^{\pm 1} \quad (20)$$

Le signe « + » convient si les racines sont des zéros et le signe « - » si ce sont des pôles. ζ est le coefficient d'amortissement ; ω_0 est la fréquence naturelle non amortie et Q le coefficient de qualité. La première forme faisant intervenir le coefficient d'amortissement ζ est employée le plus souvent par les automaticiens. La deuxième forme faisant intervenir le coefficient de qualité Q est souvent utilisée en filtrage. Les relations de passage sont :

$$\zeta = \frac{1}{2Q} \qquad \Leftrightarrow \qquad Q = \frac{1}{2\zeta}$$

Pour $\zeta > 1$ et donc $Q < 0,5$, les racines sont réelles et distinctes et pour $\zeta = 1$ ou $Q = 0,5$, elles sont réelles et égales. Dans ces cas, le terme quadratique intervenant dans la relation (20) peut être factorisé en un produit de deux termes du type déjà rencontré dans la relation (13). Nous allons nous intéresser au cas $\zeta < 1$; les racines sont alors « complexe conjugué ». Elles ont pour expression analytique :

$$\left(\frac{p}{\omega_0} \right)_{1,2} = -\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (21)$$

Imposant $p \rightarrow j\omega$ dans la relation (20) puis réarrangeant, on obtient l'expression analytique suivante, caractérisant la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2\zeta j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^{\pm 1} \quad (22)$$

Soit, les relations en module et en phase suivantes :

$$|H(j\omega)|_{dB} = \pm 10 \log \left\{ \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right]^2 \right\} \quad (23)$$

$$\angle H = \pm \arctan \left[\frac{2\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right] \quad (24)$$

Ces fonctions peuvent aisément être tracées en fonction de ω/ω_0 afin d'obtenir les diagrammes de BODE exacts. De tels diagrammes sont représentés sur les figures 9. Les courbes en trait fin sont les diagrammes exacts et les courbes en trait épais sont les approximations pour diverses valeurs les plus classiques de l'amortissement ζ ; en prenant respectivement le symétrique des courbes d'amplitude et de phase par rapport à l'axe horizontal, on obtient les diagrammes correspondant au cas où les racines sont des zéros.

En fonction de la valeur du paramètre ζ , les diagrammes présentent maintenant des familles de courbes. Nous voyons que tant que $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$, les courbes d'amplitude se trouvent toujours en dessous de l'axe 0 dB. Il apparaît pour le coefficient d'amortissement et le coefficient de qualité, la valeur critique ci-dessous :

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \qquad Q = \frac{1}{2\zeta} = 0,707 \qquad (25)$$

Cette valeur correspond au cas dit en langage de filtrage « extrêmement plat ».

Pour $\zeta < 1/\sqrt{2}$, il existe une bande de fréquence pour laquelle la courbe d'amplitude est située au dessus de l'axe 0 dB c'est à dire correspond à des valeurs supérieures à l'unité. Ce phénomène est physiquement connu comme une mise en résonance du circuit. Plus faible est la valeur de ζ , plus prononcée est la valeur du maximum. Dans le cas limite $\zeta \rightarrow 0$, on obtient pour $\omega/\omega_0 = 1$, $|H| \rightarrow \infty$ indiquant que le circuit est capable de fournir une réponse variant temporellement même en l'absence de signal appliqué à l'entrée. Comme on le sait, on se trouve dans le cas d'oscillations entretenues. Les pôles se trouvent alors sur l'axe imaginaire, $p/\omega_0 = \pm j$.

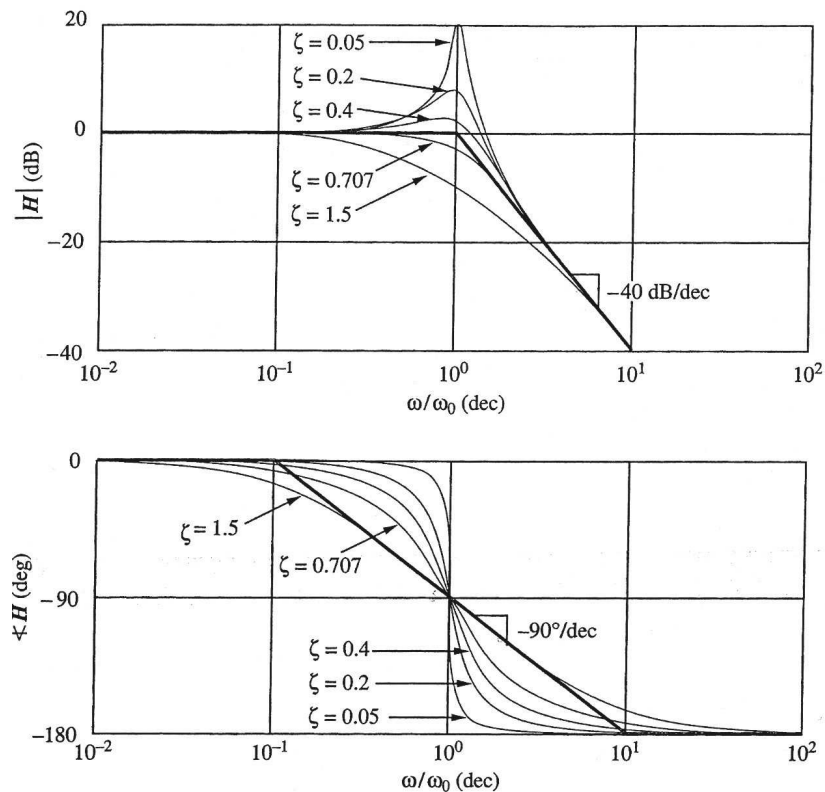


FIG. 9: Diagrammes de BODE en amplitude et en phase pour des fonctions du second ordre.

Pour des valeurs de ζ pas trop éloignées de $1/\sqrt{2}$, le phénomène de résonance est faible et l'on peut approximer les courbes réelles par des droites. Pour $\omega/\omega_0 \leq 1$, le diagramme d'amplitude peut être approximé par son asymptote basse fréquence; soit :

$$|H|_{\text{dB}} = 0 \quad \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (26)$$

L'asymptote haute fréquence quant à elle a pour expression :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$$

Le signe « + » doit être pris en compte si les racines sont des zéros et le signe « - » si les racines sont des pôles. Puisque les asymptotes se rencontrent en $\omega/\omega_0 = 1$, ω_0 peut encore être appelé fréquence de coupure.

Le diagramme de phase est approximé par son asymptote basse fréquence :

$$\angle H = 0^\circ \quad \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad (27)$$

L'asymptote haute fréquence peut être calculée pour $\omega/\omega_0 \geq 10$; elle vaut :

$$\angle H = \pm 180^\circ \quad \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \quad (28)$$

Dans l'intervalle $0,1 \leq \omega/\omega_0 \leq 10$, on peut approximer la phase par des lignes droites allant de 0° pour $\omega/\omega_0 = 0,1$ à $\pm 180^\circ$ en $\omega/\omega_0 = 10$. On remarquera que puisque nous avons maintenant une paire de racines, les pentes de l'amplitude et de la phase sont de ± 40 dB/décade et $\pm 90^\circ$ /décade ce qui correspond à deux fois les valeurs obtenues dans le cas d'une racine simple : 20 dB/décade et $\pm 45^\circ$ /décade.

Ces approximations sont satisfaisantes tant que ζ est proche de $1/\sqrt{2}$, mais pour des valeurs de ζ plus faibles c'est à dire pour des coefficients de qualité élevés, on peut souhaiter les appliquer moyennant des corrections convenables reflétant la présence du phénomène de résonance. On a l'habitude d'effectuer ces corrections aux points significatifs suivants (on se référera à la figure 10).

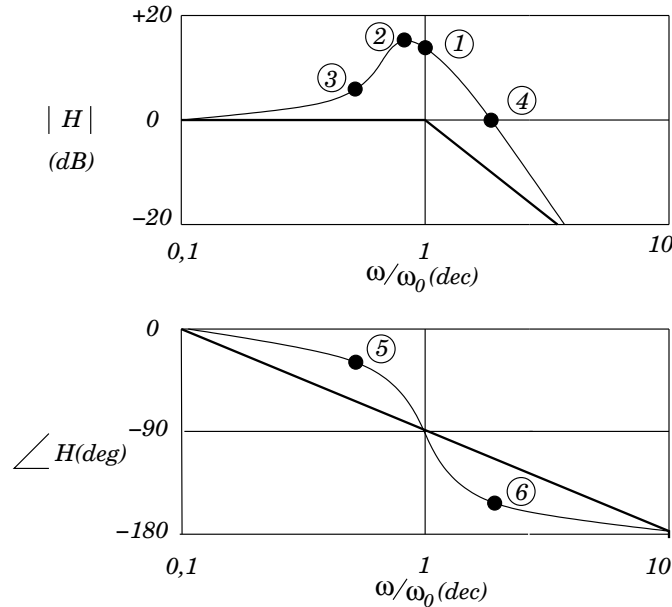


FIG. 10: Points significatifs permettant de mieux approximer le diagramme fréquentiel correspondant à une paire de racines « complexe conjugué ».

- A la fréquence de cassure, soit $\omega/\omega_0 = 1$, l'équation (23a) prédit la valeur numérique suivante :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 20 \log(2\zeta) = \mp 20 \log(Q) \quad (29)$$

C'est le point noté 1 sur la figure 10; il correspond à $\omega_1 = \omega_0$.

- La fréquence pour laquelle $|H|_{\text{dB}}$ passe par maximum peut être trouvée après dérivation de l'équation (23a) par rapport à ω/ω_0 en égalant le résultat à zéro. On trouve facilement que cette pulsation ω_2 a pour valeur :

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (30)$$

A cette fréquence, l'équation (23a) prédit la valeur suivante :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 10 \log [4\zeta^2 \times (1 - \zeta^2)] = \pm 10 \log \left\{ \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) \right\} \quad (31)$$

C'est le point noté 2 de la figure 10; il correspond à $\omega = \omega_2$.

- Une octave en dessous de la fréquence de cassure, soit pour $\omega_3/\omega_0 = 1/2$, l'équation (23a) prédit la valeur :

$$|H|_{\text{dB}} = \pm 10 \log [\zeta^2 + 0,75^2] = \pm 10 \log \left[\frac{1}{4Q^2} + 0,75^2 \right] \quad (32)$$

C'est le point noté 3 de la figure 10; il correspond à $\omega = \omega_3$.

- La fréquence pour laquelle la courbe d'amplitude coupe l'axe des 0 dB est trouvée encore en utilisant la relation (23a) et a pour valeur ω_4 :

$$\frac{\omega_4}{\omega_0} = \sqrt{2(1 - 2\zeta^2)} = \sqrt{2} - \frac{1}{Q^2} \quad (33)$$

C'est le point noté 4 de la figure 10; il correspond à $\omega = \omega_4$.

- Une octave en dessous la fréquence de cassure, soit pour $\omega_4/\omega_0 = 1/2$, l'équation (23a) prédit pour la phase, la valeur ci-dessous :

$$\angle H = \pm \arctan \left(\frac{\zeta}{0,75} \right) = \pm \arctan \left(\frac{1}{1,5Q} \right) \quad (34)$$

C'est le point noté 5 de la figure 10; il correspond à $\omega = \omega_4$.

- Une octave en dessus de la fréquence de cassure, soit pour $\omega_6/\omega_0 = 2$, l'équation (23a) prédit pour la phase, la valeur :

$$\angle H = \pm \left[180^\circ - \arctan \left(\frac{\zeta}{0,75} \right) \right] = \pm \left[180^\circ - \arctan \left(\frac{1}{1,5Q} \right) \right] \quad (35)$$

Exemple 2 : Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{100}{p^2 + 5p + 100} \quad (36)$$

Trouver ω_0 , ζ et le facteur d'échelle K . Calculer ensuite les valeurs de $|H|_{\text{dB}}$ et de $\angle H$ aux points significatifs que l'on vient de décrire.

Solution de l'exemple 2 : En factorisant le coefficient 100, on obtient :

$$H(p) = \frac{100}{100} \times \frac{1}{\frac{p^2}{100} + \frac{5p}{100} + 1} \quad (37)$$

Il est alors évident que $K = 100/100$, d'où $K = 1$. Si l'on compare l'expression de $H(p)$ avec la forme standard de la relation (20), on obtient les identifications suivantes :

$$\left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2 \equiv \frac{p^2}{100} \rightarrow \omega_0 = 10 \text{ rad/s} \quad 2\zeta \left(\frac{p}{\omega_0} \right) \equiv \frac{5p}{100} \rightarrow \zeta = 0,25$$

Le coefficient de qualité du système a donc pour valeur $Q = 2$. Le système est donc légèrement résonnant ; les propriétés précédentes peuvent lui être appliquées.

En utilisant les relations (27) jusqu'à (31), on obtient les valeurs des points caractéristiques suivants :

1. Pour $\omega = 10$ rad/s, $|H|_{\text{dB}} = -20 \log(2 \times 0,25) = 6,05$ dB.
2. L'amplitude passe par un maximum pour $\omega = 10\sqrt{1 - (0,25)^2} = 9,68$ rad/s et la valeur de ce maximum est $|H|_{\text{dB}} = -10 \log \left[4 \times (0,25)^2 \times (1 - (0,25)^2) \right] = 6,3$ dB.
3. Pour $\omega = 5$ rad/s, $|H|_{\text{dB}} = -10 \log \left[(0,25)^2 + (0,75)^2 \right] = 2,0$ dB.
4. La courbe d'amplitude coupe l'axe 0 dB au point fréquentiel : $\omega_4 = 10\sqrt{2 \left\{ 1 - 2(0,25)^2 \right\}} = 13,2$ rad/s.
5. Pour $\omega = 5$ rad/s, $\angle H = -\arctan(0,25/0,75) = -18,4^\circ$.
6. Pour $\omega = 20$ rad/s, $\angle H = -\{180^\circ - \arctan(0,25/0,75)\} = -161,6^\circ$.

Exercice 2 : $H(p)$ a une paire de pôles « complexe conjugué » en $p_{1,2} = (-10 \pm j50)$ rad/s et un facteur d'échelle de 10.

1. Trouver ω_0 et ζ ;
2. Calculer les valeurs de $|H|_{\text{dB}}$ et de $\angle H$ aux six points significatifs.

Réponse de l'exercice 2 :

1. 50,99 rad/s ; 0,1961 dB ;
2. 28,13 dB ; 28,30 dB ; 22,21 dB ; $|H|_{\text{dB}} = 0$ pour $\omega = 168,4$ rad/s ; $-14,65^\circ$; $-163,35^\circ$.

2.4.2 Cas de racines multiples

Si la paire des racines « complexe conjugué » a un pôle de multiplicité « r », le terme correspondant peut se mettre sous la forme H^r . Nous avons alors les relations suivantes :

$$|H^r|_{\text{dB}} = r \times |H|_{\text{dB}} \qquad \angle H^r = r \times \angle H$$

Les diagrammes de BODE de H^r peuvent donc être obtenus à partir des diagrammes de BODE de H en multipliant les valeurs correspondantes par r .

En particulier, une pente de ± 20 dB/décade (ou $\pm 45^\circ$ /décade) devient une pente de $\pm 20 \times r$ dB/décade (ou $\pm 45 \times r^\circ$ /décade). De la même façon, une pente de ± 40 dB/décade (ou $\pm 90^\circ$ /décade) devient une pente de $\pm 40 \times r$ dB/décade (ou $\pm 90 \times r^\circ$ /décade).

3 Diagrammes de Bode linéaires par morceaux

3.1 Mise en cascade de briques élémentaires

Maintenant que l'on a appris à tracer les diagrammes de BODE des briques élémentaires, nous devons être capables d'envisager de tracer les diagrammes de BODE linéaires par morceaux de n'importe quelle fonction gain. Ces diagrammes sont très précis lorsque les racines sont bien séparées les unes des autres, par exemple, d'au moins une décade. Cependant, même lorsque cette condition n'est pas réalisée, ces diagrammes fournissent un bon point de départ à une compréhension solide de la caractéristique fréquentielle.

En général la fonction gain peut être exprimée sous la forme :

$$H(p) = K \times \frac{N_1(p) N_2(p) \dots N_k(p)}{D_1(p) D_2(p) \dots D_l(p)} \quad (38)$$

K est un facteur d'échelle et les termes constituant le numérateur $N_1(p)$ jusqu'à $N_k(p)$ et ceux constituant le dénominateur $D_1(p)$ jusqu'à $D_l(p)$ ont l'une des formes standard du premier ordre suivantes :

$$\frac{p}{\omega_0} \qquad \frac{p}{\omega_0} + 1$$

ou du deuxième ordre suivante :

$$\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{p}{\omega_0}\right) + 1 \qquad \zeta < 1$$

La dernière forme est uniquement utilisée pour $\zeta < 1$. Si $\zeta > 1$, les racines sont réelles et le terme quadratique peut être factorisé en un produit de deux termes du premier degré du type représenté par l'équation (13). Imposant dans la relation (36) $p = j\omega$, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} |H|_{\text{dB}} &= |K|_{\text{dB}} + |N_1|_{\text{dB}} + |N_2|_{\text{dB}} + \dots + |N_k|_{\text{dB}} - |D_1|_{\text{dB}} - |D_2|_{\text{dB}} - \dots - |D_l|_{\text{dB}} \\ \angle H &= \angle K + \angle N_1 + \angle N_2 + \dots + \angle N_k - \angle D_1 - \angle D_2 - \dots - \angle D_l \end{aligned}$$

D'après les expressions précédentes, on peut dire que les diagrammes de BODE de H peuvent être obtenus d'abord en traçant les diagrammes de BODE des briques individuelles puis en les ajoutant graphiquement. La procédure est résumée comme suit :

1. Soit une fonction gain $H(p)$ donnée ; la factoriser suivant la forme standard rappelée par la relation (36), chaque terme du numérateur et du dénominateur ayant une des formes rappelées pour les fonctions du premier et du second ordre ;
2. Tracer séparément les diagrammes de BODE linéarisés des termes du numérateur aussi bien que des termes inverses du dénominateur. Si un terme a un ordre de multiplicité r , on doit alors multiplier par r , à la fois les pentes des amplitudes et les valeurs des phases ;
3. Ajouter ces diagrammes individuels aussi bien en amplitude qu'en phase afin d'obtenir le diagramme global correspondant à celui de H .

On remarquera que l'effet du facteur d'échelle K sur l'amplitude est de décaler la courbe d'amplitude en entier vers le haut ou vers le bas, suivant que $|K| > 1$ ou $|K| < 1$. De plus, on remarquera que l'effet sur la phase est nul si $|K| > 0$ et qu'on a un décalage de $\pm 180^\circ$ si $|K| < 0$.

Exercice 2 : Mettre en oeuvre et tracer les diagrammes de BODE linéarisés de la fonction gain suivante :

$$H(p) = \frac{\sqrt{10^5}(p + 10^2)}{(p + 10)(p + 10^3)} \quad (39)$$

Solution de l'exercice 2 : Nous mettons d'abord chaque terme sous la forme standard représentée par la relation (36) :

$$H(p) = \frac{\sqrt{10^{+5}}10^2 \left(\frac{p}{10^2} + 1\right)}{10 \left(\frac{p}{10} + 1\right) 10^3 \left(\frac{p}{10^3} + 1\right)} = \sqrt{10} \frac{\frac{p}{10^2} + 1}{\left(\frac{p}{10} + 1\right) \left(\frac{p}{10^3} + 1\right)} \quad (40)$$

Bien évidemment, nous avons une fonction du type :

$$H(p) = K \times \frac{N_1(p)}{D_1(p) D_2(p)} \quad (41)$$

Les identifications permettent de faire apparaître les valeurs numériques suivantes :

- un facteur d'échelle $K = \sqrt{10}$;
- un zéro en $z_1 = -10^{+2}\text{rad/s}$;
- deux pôles simples en $p_1 = -10\text{ rad/s}$ et $p_2 = -10^{+3}\text{rad/s}$.

On notera les fréquences de cassure correspondantes par ω_{z1} , ω_{p1} et ω_{p2} . On les marquera en bas du diagramme afin d'obtenir une identification aisée. Nous sommes maintenant prêts à dessiner les diagrammes des termes individuels que nous représenterons en lignes pointillées.

Commençons par le diagramme d'amplitude et remarquons que $|K|_{\text{dB}}$ est une ligne horizontale positionnée en $|\sqrt{10}|_{\text{dB}} = 10\text{ dB}$. Les termes restants ont en commun l'asymptote basse fréquence à 0 dB. On note de plus que $|N_1|_{\text{dB}}$ commence à monter à partir de ω_{z1} tandis que $-|D_1|_{\text{dB}}$ et $-|D_2|_{\text{dB}}$ commencent à descendre à partir de ω_{p1} et ω_{p2} respectivement. Les diagrammes individuels sont représentés sur la figure 11 en haut. En commençant à partir de l'extrême gauche et en avançant vers la droite, on ajoute ces contributions point par point afin d'obtenir la courbe composite pour $|H|_{\text{dB}}$ représentée en trait plein.

Suivant une procédure similaire pour la phase, on rapporte d'abord les phases des termes individuels puis on les ajoute en commençant à l'extrême gauche et en progressant vers la droite afin d'obtenir la courbe composite pour $\angle H$. Ceci est représenté sur la courbe en bas de la figure 11.

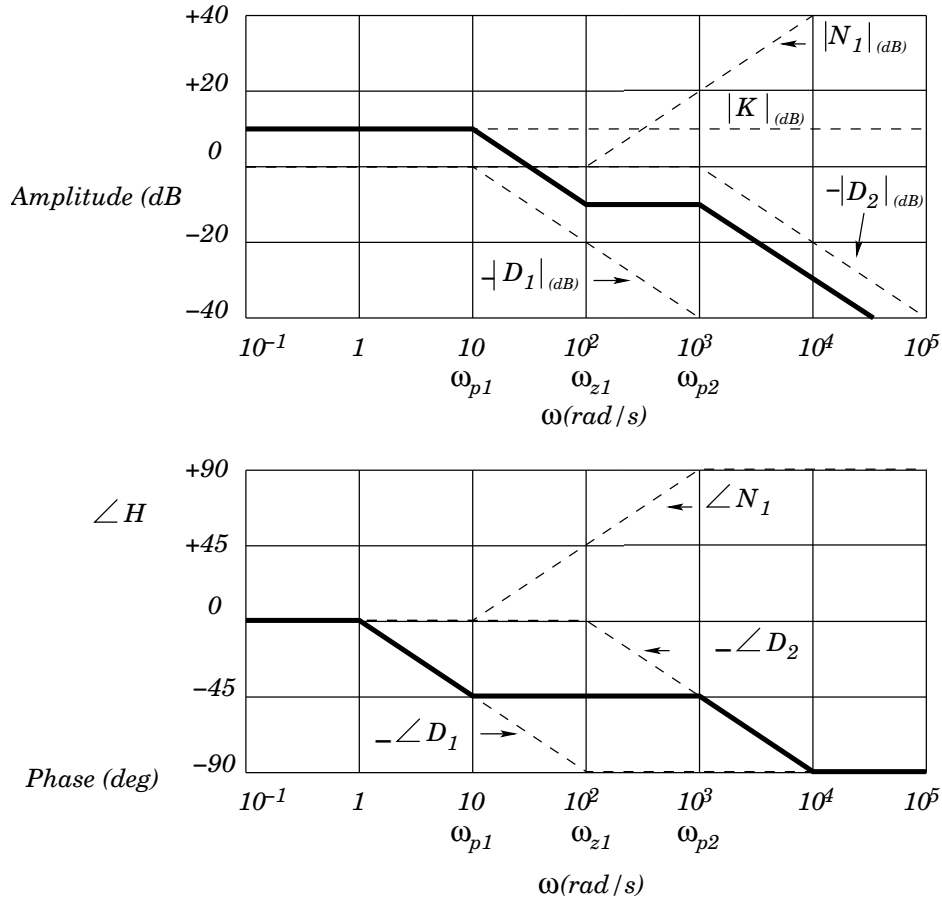


FIG. 11: Diagrammes de BODE linéarisés de l'exemple 3 en amplitude et en phase.

Exemple 4 : Mettre en oeuvre et représenter les diagrammes de BODE linéarisés en amplitude et en phase de la fonction gain suivante :

$$H(p) = \frac{10^6 (p + 10^3)^2}{p(p^2 + 1,1 \times 10^5 p + 10^9)} \quad (42)$$

Solution de l'exemple 4 : On peut facilement constater que le terme quadratique au dénominateur a deux racines réelles ayant pour valeur -10^4rad/s et -10^5rad/s , ce qui indique la factorisation suivante $(p + 10^4)(p + 10^5)$. Afin de mettre chaque terme sous sa forme standard, on doit récrire les expressions sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{10^6 (p + 10^3)^2}{p(p^2 + 1,1 \times 10^5 p + 10^9)} = \frac{10^6 \times (10^3)^2 \left(\frac{p}{10^3} + 1\right)^2}{p \times 10^4 \times \left(\frac{p}{10^4} + 1\right) \times 10^5 \times \left(\frac{p}{10^5} + 1\right)}$$

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{10^3} + 1\right)^2}{\left(\frac{p}{10^3}\right) \times \left(\frac{p}{10^4} + 1\right) \times 10^5 \times \left(\frac{p}{10^5} + 1\right)} = \frac{N_1^2(p)}{D_1(p) \times D_2(p) \times D_3(p)}$$

$H(p)$ a donc les caractéristiques suivantes :

- un zéro en $z_1 = -10^3 \text{rad/s}$ d'ordre de multiplicité 2;
- un pôle p_1 à l'origine avec une fréquence de gain unité de 10^3rad/s ;
- une paire de pôles que nous avons déjà mentionnée en $p_2 = -10^4 \text{rad/s}$ et $p_3 = -10^5 \text{rad/s}$.

Nous appellerons les fréquences de cassure précédemment définies, ω_{z1} , ω_{p2} , ω_{p3} ainsi que ω_{p1} , la fréquence de gain unité; nous marquerons ces fréquences au bas des diagrammes.

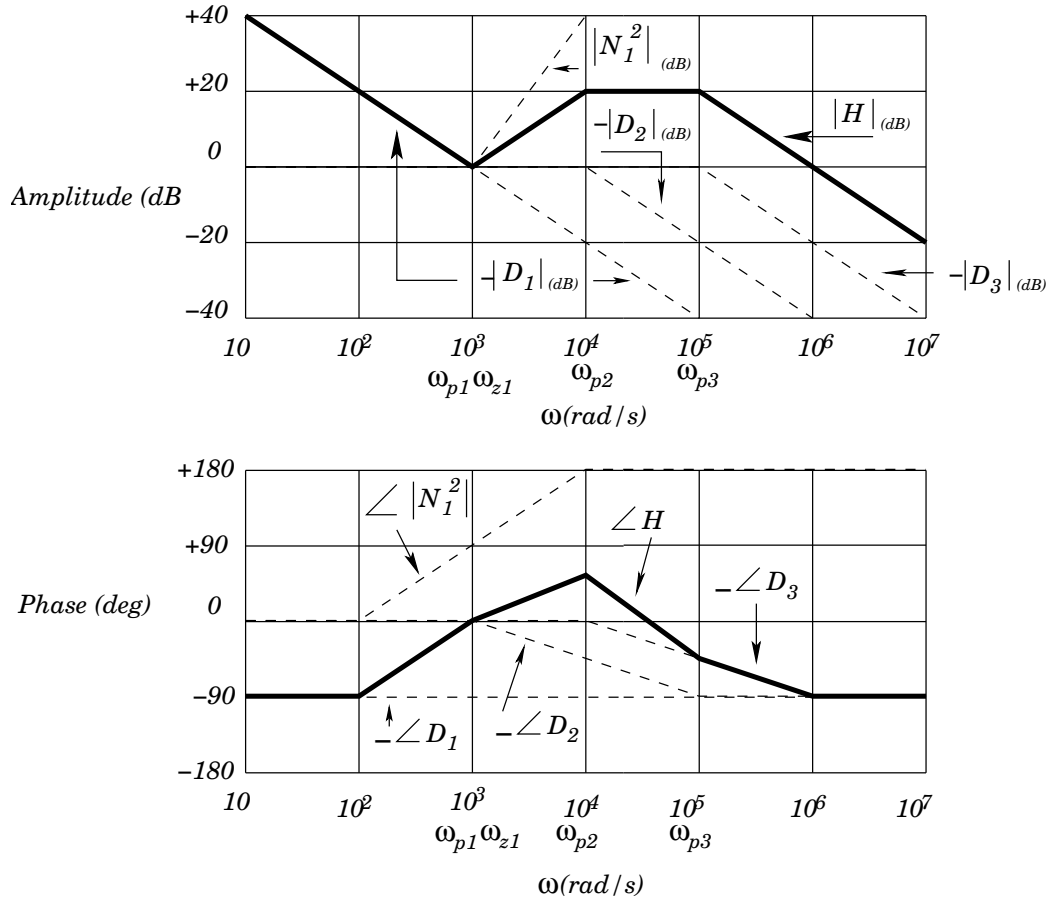


FIG. 12: Diagrammes de BODE de l'exemple 4.

On trace, le diagramme des termes individuels sous la forme de lignes pointillées. On les additionne ensuite en procédant de la gauche vers la droite. Le diagramme résultant composite est représenté sous forme de traits pleins sur la figure 12. On remarquera que parce que la racine est de multiplicité

2, les pentes en amplitude et en phase de N_1^2 ont respectivement pour valeur $2 \times 20 = 40$ dB/décade et $2 \times 45 = 90^\circ$ /décade.

Exercice 3 : Mettre en oeuvre et tracer, les diagrammes de BODE linéarisés de la fonction gain suivante :

$$H(p) = \frac{10 \times (p^2 + \sqrt{1210}p + 100)}{p \times (p + 10^4)} \quad (43)$$

Exemple 5 : Mettre en oeuvre et tracer, les diagrammes de BODE linéarisés de la fonction gain suivante :

$$H(p) = \frac{18600p^2}{(p^2 + 12p + 100)(6p + 1860)} \quad (44)$$

Solution de l'exemple 5 : L'expression analytique de $H(p)$ peut subir les transformations suivantes, tenant compte de la propriété $\sqrt{10} \approx 3,6$:

$$H(p) = \frac{18600 \times p^2}{100 \left[\frac{p^2}{100} + \frac{12}{100}p + 1 \right] \times 1860 \times \left(\frac{6p}{1860} + 1 \right)}$$

$$H(p) = \frac{\left(\frac{p}{3,16} \right)^2}{\left[\left(\frac{p}{10} \right)^2 + 2 \times 0,6 \left(\frac{p}{10} \right) + 1 \right] \times \left(\frac{p}{316} + 1 \right)} = \frac{N_1^2(p)}{D_1(p) \times D_2(p)}$$

Pour la forme quadratique apparaissant au dénominateur, on a la valeur $2\zeta = 0,6$; soit $\zeta = 0,3$.

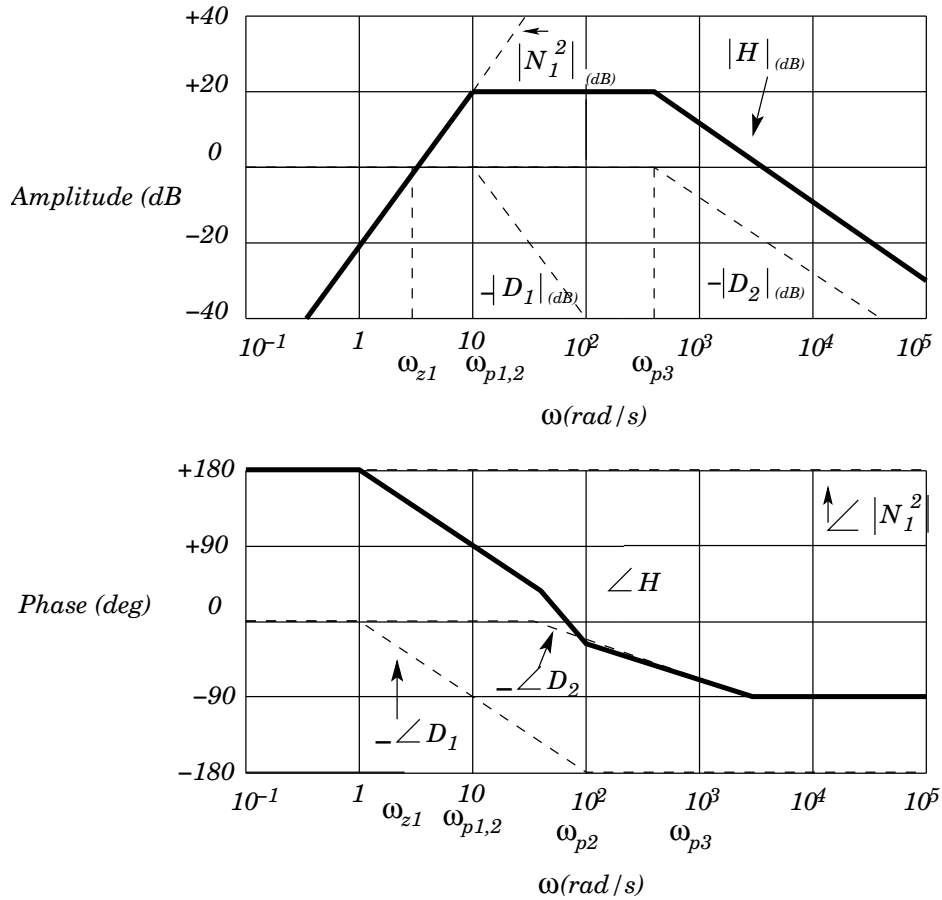


FIG. 13: Diagrammes de BODE de l'exemple 5.

De façon qualitative, l'expression de $H(p)$ montre que l'on a les propriétés suivantes :

- un zéro à l'origine, de multiplicité 2 correspondant à $N_1^2(p)$;
- une paire de pôles complexes conjugués définissant $D_1(p)$;
- un pôle simple négatif relatif à $D_2(p)$.

De façon quantitative, on obtient les valeurs suivantes :

- la fréquence de gain unité pour le zéro a pour valeur $\omega_{z1} = 3,16 \text{ rad/s}$;
- la fréquence de cassure pour la paire de pôles a pour valeur $\omega_{p1,2} = 10 \text{ rad/s}$;
- la fréquence de cassure du pôle restant est $\omega_{p3} = 316 \text{ rad/s}$.

Ces fréquences sont rapportées en bas du diagramme. Procédant d'abord de façon classique pour les diagrammes des termes individuels, puis les ajoutant en partant de la gauche en allant vers la droite, on obtient le diagramme composite représenté sur la figure 13.

Exercice 4 : Mettre en oeuvre et tracer les diagrammes de BODE linéarisés de la fonction gain suivante :

$$H(p) = \frac{10^4(p^2 + 6p + 25)}{p^2(p^2 + 160p + 10^4)} \quad (45)$$

3.2 Représentation graphique directe de l'amplitude

Souvent, on n'est intéressé que par les diagrammes en amplitude. Lorsqu'on a acquis une certaine expérience, on doit être capable de tracer directement le diagramme en amplitude, sans avoir à tracer les amplitudes des termes individuels, en utilisant la démarche suivante :

1. Marquez toutes les fréquences de cassure en bas du diagramme en même temps que la fréquence de gain unité concernant n'importe quelle racine à l'origine ;
2. S'il n'y a pas de racines à l'origine, commencez par le point $|K|_{\text{dB}}$ sur l'axe des ordonnées et tracez une ligne horizontale de la gauche vers la droite jusqu'à ce que vous atteigniez la première fréquence de coupure. En ce point, changez la pente d'une valeur de $\pm 20r \times \text{dB/décade}$ si la racine correspondante est un zéro ou d'une valeur de $-20r \times \text{dB/décade}$ si c'est un pôle, r étant l'ordre de multiplicité de la racine. Continuez de procéder vers la droite jusqu'à ce que cette nouvelle pente atteigne une nouvelle fréquence de cassure, pour laquelle on change encore la valeur de la pente en accord avec le type de racine rencontré et avec son ordre de multiplicité. Continuez à aller vers les nouvelles fréquences de cassure jusqu'à ce que toutes aient été prises en compte ;
3. S'il y a une racine à l'origine, alors suivant que c'est un zéro ou un pôle, commencez au plus près du bas gauche ou du haut gauche du diagramme et allez vers la fréquence de gain unité sur l'axe 0 dB avec une pente de $+20r \times \text{dB/décade}$ ou $-20r \times \text{dB/décade}$ si r est la multiplicité de la racine. Continuez le long de cette ligne jusqu'à atteindre la fréquence de cassure, pour laquelle vous changez la pente en accord, avec la nature et l'ordre de multiplicité de la racine considérée comme déjà indiqué dans l'étape $n^{\circ}2$. Continuez de procéder vers la droite jusqu'à ce que toutes les fréquences de cassure aient été prises en compte.

Revenez aux premiers diagrammes de BODE en amplitude que l'on a tracés et convainquez vous que vous êtes maintenant capables de les tracer en suivant la protocole précédent et en allant beaucoup plus vite. Étudions un exemple final.

Exemple 6 : Une fonction gain est caractérisée par la constellation des pôles et des zéros suivante :

- un zéro double $z_{1,2} = -10 \text{ rad/s}$;
- deux pôles simples $p_1 = -10^2 \text{ rad/s}$, $p_2 = -10^3 \text{ rad/s}$;
- une paire de pôles complexes conjugués $p_{3,4} = (-8 \pm j6) 10^3 \text{ rad/s}$;
- un zéro $z_3 = -1,75 \times 10^5 \text{ rad/s}$.

En supposant un facteur d'échelle de valeur $K = 0,1$, tracer le diagramme de BODE en amplitude.

Solution de l'exemple 6 : La paire de pôles « complexe conjugué », conduit à un système du second ordre en p de la forme :

$$\begin{aligned} [p + (+8 + j6) 10^{+3}] &= (p + 8 \times 10^{+3})^2 + (6 \times 10^{+3})^2 = p^2 + 16 \times 10^{+3}p + 10^{+6}(8^2 + 6^2) \\ &= p^2 + 16 \times 10^{+3}p + 10^{+8} \end{aligned}$$

La décomposition précédente fait apparaître pour $\omega_{p3,4}$ la valeur $\omega_{p3,4} = 10^4$ rad/s.

Marquons d'abord, toutes les fréquences de cassure. Comme il est représenté sur la figure ??, on obtient les valeurs numériques suivantes, classées par ordre croissant :

$$\omega_{z1,2} = 10 \text{ rad/s} \quad \omega_{p1} = 10^2 \text{ rad/s} \quad \omega_{p2} = 10^3 \text{ rad/s} \quad \omega_{p3,4} = 10^4 \text{ rad/s} \quad \omega_{z3} = 1,75 \times 10^5 \text{ rad/s}$$

L'énoncé indique qu'à l'origine ($p = 0$), il n'y a ni pôle ni zéro. On obtient pour $H(p)$, l'expression analytique suivante :

$$H(p) = 0,1 \times \left(\frac{p+10}{10}\right)^2 \times \left(\frac{100}{p+100}\right) \times \left(\frac{1000}{p+1000}\right) \times \frac{10^{+8}}{p^2 + 16 \times 10^{+3}p + 10^{+8}} \times \left(\frac{p + 1,75 \times 10^{+5}}{1,75 \times 10^{+5}}\right)$$

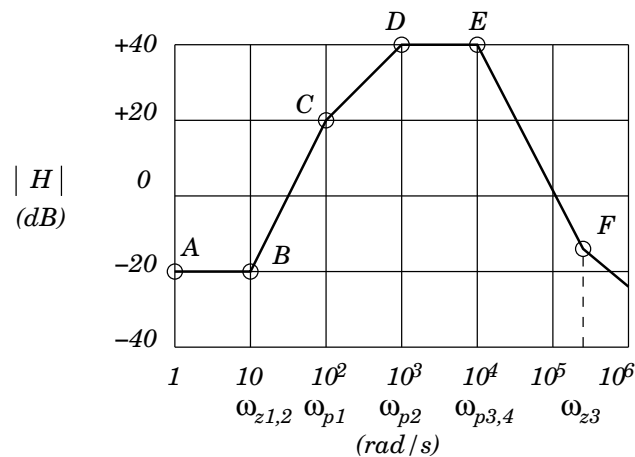


FIG. 14: Tracé direct du diagramme d'amplitude.

La première racine étant obtenue pour $\omega = 10$ rad/s, le premier module fréquentiel sera $[1; 10]$. Pour ces valeurs très faibles de ω , $H(p)$ est équivalent à $K = 0,1$. Cherchons l'équivalent en décibels de $0,1$, soit : $|0,1|_{\text{dB}} = -20$ dB (point A) ; on continue vers la droite, avec une pente de valeur nulle jusqu'à ce que l'on rencontre la première fréquence de cassure (point B).

Puisque $\omega_{z1,2} = 10$ rad/s correspond à un zéro double, la pente change d'une valeur nulle à la valeur $0 + 20 \times 2 = 40$ dB/décade et continue de croître avec cette valeur jusqu'à ce qu'elle rencontre la prochaine fréquence de cassure $\omega_{p1} = 100$ rad/s (point C).

Puisque la fréquence de cassure au point C correspond à un pôle simple, la valeur de la pente passe de 40 dB/décade à $40 - 20 \times 1 = 20$ dB/décade et doit être continuée jusqu'au point D, $\omega_{p2} = 10^3$ rad/s. Puisque en ce point, il y a un autre pôle simple ; la pente passe donc de la valeur 20 dB/décade à 0 dB/décade et la courbe se continue jusqu'au point E.

Grâce à la présence de la paire de pôles complexes conjugués, la pente passe donc de la valeur nulle à une valeur $0 - 20 \times 2 = -40$ dB/décade.

Enfin, au point F qui correspond à un zéro simple $\omega_{z3} = 1,75 \times 10^5$ rad/s, la pente change encore une fois de valeur et passe de -40 à $-40 + 20 \times 1 = -20$ dB/décade. A partir de là, l'amplitude varie en fonction de ω avec une pente de -20 dB/décade. L'amplitude au point F est donc obtenue

en écrivant que l'on passe du point E au point F, avec une pente de -40 dB/décade. Puisque la pente est de -40 dB/décade, la différence d'amplitude entre les points E et F est donc :

$$-40 \log\left(\frac{1,75 \times 10^{+5}}{10^{+4}}\right) = -40 \log(17,5) = -49,72$$

L'amplitude au point F a donc pour valeur : $40 - 49,72 = -9,72$ dB

Exercice 5 : Tracer directement le diagramme en amplitude d'une fonction gain ayant un zéro simple à l'origine avec une fréquence de gain unité $\omega_{z_1} = 10$ rad/s, un zéro simple $z_2 = -10^3$ rad/s, deux pôles simples en $p_1 = -10^2$ rad/s et $p_2 = -\sqrt{10^5}$ rad/s, enfin, une paire de pôles complexes conjugués en $p_{3,4} = (-8 \pm j6) \times 10^5$ rad/s.